

3.1.1 Ιδιότητες της Κανονικής κατανομής

1. Το πεδίο ορισμού θεωρητικά είναι ολόκληρο το R , αλλά το μεγαλύτερο πλήθος των τιμών της βρίσκεται στο διάστημα $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$
2. Η καμπύλη της κανονικής κατανομής είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x = \mu$.
3. Η συνάρτηση είναι αύξουσα για $x < \mu$ και φθίνουσα για $x > \mu$. Για $x = \mu$ παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

$$f'(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

4. Η καμπύλη της συνάρτησης είναι κοίλη στο διάστημα $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ και κυρτή στα υπόλοιπα διαστήματα. Παρουσιάζει σημεία καμπής στα σημεία $\mu - \sigma$ και $\mu + \sigma$.

$$f''(x) = \left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - 1 \right] \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

5. Πλήθος παρατηρήσεων στη Κανονική κατανομή

$$50\% \text{ στο διάστημα } \left[\bar{X} - \frac{2}{3}\sigma, \bar{X} + \frac{2}{3}\sigma \right]$$

$$68\% \text{ στο διάστημα } [\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma]$$

$$95\% \text{ στο διάστημα } [\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma]$$

$$99\% \text{ στο διάστημα } [\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma]$$

6. Έστω οι ανεξάρτητες μεταβλητές $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Η μεταβλητή $X = X_1 \pm X_2 \sim N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

7. Το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού ($n > 30$) ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την ίδια κατανομή με διαφορετικές παραμέτρους ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = \sum \mu_i$ και $\sigma^2 = \sum \sigma_i^2$