

4 Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Γνωρίζουμε ότι ένα στατιστικό μέτρο ενός τυχαίου δείγματος, δηλαδή μία πραγματική συνάρτηση των τιμών του μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση μιας αντίστοιχης άγνωστης παράμετρος του πληθυσμού. Η τιμή του στατιστικού μέτρου σε ορισμένο δείγμα ονομάζεται σημειακή εκτίμηση ή απλώς εκτίμηση και η μέθοδος ή ο τύπος με τον οποίο παράγεται η τιμή αυτή ονομάζεται εκτιμητής. Έτσι ο δειγματικός μέσος \bar{X} σε ορισμένο τυχαίο δείγμα αποτελεί έναν εκτιμητή του μέσου μ του πληθυσμού και μια τιμή του \bar{X} αποτελεί μία **προσέγγιση** της μέσης τιμής του πληθυσμού. Κάθε στατιστικό μέτρο όμως είναι μια τυχαία μεταβλητή δηλαδή μπορεί να πάρει περισσότερες από μία τιμές αφού σε κάθε δείγμα αντιστοιχεί κατά κανόνα και μια διαφορετική τιμή. Έτσι κάθε στατιστικό μέτρο παρουσιάζει μεταβλητότητα και επομένως η πιθανότητα για μια εκτίμησή της να διαφέρει από την πραγματική τιμή της αντίστοιχης παραμέτρου στον πληθυσμό είναι σχεδόν πάντα μεγαλύτερη από το μηδέν.

Για πολλές πρακτικές εφαρμογές η εκτίμηση της τιμής μιας παραμέτρου Θ ενός πληθυσμού με την τιμή ενός στατιστικού μέτρου σε ορισμένο τυχαίο δείγμα θεωρείται αρκετή. Υπάρχουν όμως εφαρμογές όπου θέλουμε να γνωρίζουμε πόση εμπιστοσύνη μπορούμε να έχουμε όταν χρησιμοποιούμε π.χ. τη μέση τιμή ενός τυχαίου δείγματος για να εκτιμήσουμε την μέση τιμή του πληθυσμού. Στις περιπτώσεις αυτές εκτιμούμε ένα διάστημα τιμών $[l, u]$ στο οποίο θα βρίσκεται η τιμή της παραμέτρου με ορισμένη πιθανότητα $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Δηλαδή έχουμε:

$$P(l \leq \Theta \leq u) = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

Το $[l, u]$ ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα ή επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$. Οι τιμές l, u ονομάζονται όρια εμπιστοσύνης του διαστήματος και η πιθανότητα α για την οποία ισχύει:

$$P(\Theta \notin [l, u]) = \alpha$$

ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας.

Το διάστημα εμπιστοσύνης για ορισμένη παράμετρο Θ είναι συνάρτηση της τιμής του εκτιμητή $\hat{\Theta}$ σε ορισμένο τυχαίο δείγμα και **προσδιορίζεται με βάση την κατανομή του $\hat{\Theta}$** . Συνεπώς οι τιμές δεν είναι σταθερές ποσότητες αλλά τυχαίες μεταβλητές. Αυτό σημαίνει ότι από διαφορετικό τυχαίο δείγμα ίδιου μεγέθους θα εκτιμήσουμε διαφορετικό διάστημα εμπιστοσύνης για την ίδια παράμετρο πληθυσμού. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια συστηματική μέθοδο με την οποία υπολογίζουμε το διάστημα εμπιστοσύνης για τις κυριότερες παραμέτρους πληθυσμού.