

4.1 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή

4.1.1 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή (γνωστή διασπορά)

Αν έχουμε μία τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή μ και γνωστή διασπορά σ^2 , τότε η μέση τιμή \bar{X} της μεταβλητής X θα ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2/n)$ και η μεταβλητή

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$. Συνεπώς το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της τυπικής κανονικής κατανομής:

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \Rightarrow \\ 1 - \alpha &= P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \Rightarrow \\ 1 - \alpha &= P\left(-\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq -\mu \leq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \Rightarrow \\ 1 - \alpha &= P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \end{aligned}$$

Άρα το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή θα είναι:

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}\right]$$

Παράδειγμα 4.1

Μας δίνεται ότι η ηλικία ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 18. Έστω ότι από αυτό τον πληθυσμό έχουμε το παρακάτω δείγμα: 61, 32, 35, 26, 25, 59, 46, 99, 57, 64, 72, 67, 33, 23, 33, 59. Να βρεθούν τα 90%, 95% και 99% διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{X} = 49,44$. Το πλήθος του δείγματος είναι 16. Από τον πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής παίρνουμε:

$z_{0,95}=1,64$ Άρα το 90% Δ.Ε. είναι: $[49,44-1,64*18/4, 49,44+1,64*18/4]= [42,06, 56,82]$.

$z_{0,975}=1,96$ Άρα το 95% Δ.Ε. είναι: $[49,44-1,96*18/4, 49,44+1,96*18/4]= [40,62, 58,26]$

$z_{0,995}=2,58$ Άρα το 99% Δ.Ε. είναι: $[49,44-2,58*18/4, 49,44+2,58*18/4]=[37,83, 61,05]$