

4.1.2 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή (άγνωστη διασπορά, $n < 30$)

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές όταν αγνοούμε τη μέση τιμή πληθυσμού αγνοούμε και την διακύμανση του. Στις περιπτώσεις αυτές εκτιμούμε τη διακύμανση του πληθυσμού με την τιμή της δειγματικής διακύμανσης

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Όταν η κατανομή πληθυσμού μπορεί να υποταθεί κανονική, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί την κατανομή *t-student* με $v=n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της *t* κατανομής:

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(-t_{v,\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{v,\alpha/2}\right) \Rightarrow \\ 1-\alpha &= P\left(-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{v,\alpha/2} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{s}{\sqrt{n}}t_{v,\alpha/2}\right) \Rightarrow \\ 1-\alpha &= P\left(-\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{v,\alpha/2} \leq -\mu \leq -\bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{v,\alpha/2}\right) \Rightarrow \\ 1-\alpha &= P\left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{v,\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{v,\alpha/2}\right) \end{aligned}$$

Επομένως, αν \bar{X} και s^2 είναι η τιμή του μέσου και της διακύμανσης, αντίστοιχα, σε ορισμένο τυχαίο δείγμα μεγέθους n , τότε θα εκτιμήσουμε ότι το διάστημα

$$\left[\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{v,\alpha/2}, \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{v,\alpha/2} \right]$$

θα περιέχει την μ με επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Παράδειγμα 4.2

Μας δίνεται ότι η ηλικία ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω ότι από αυτό τον πληθυσμό έχουμε το παρακάτω δείγμα: 61, 32, 35, 26, 25, 59, 46, 99, 57, 64, 72, 67, 33, 23, 33, 59. Να βρεθούν τα 90%, 95% και 99% διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Έχουμε:

Η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{X} = 49,44$. Η δειγματική διασπορά είναι $s^2 = 451,33$

και η δειγματική τυπική απόκλιση είναι $s=21,24$. Το πλήθος του δείγματος είναι 16. Από τον πίνακα της student κατανομής παίρνουμε:

$t_{15, 0.05}=1,753$ Άρα το 90% Δ.Ε. είναι: $[49,44-1,753 * 21,24/4, 49,44+1,753*21,24/4]=$
 $[40,13, 58,75]$.

$t_{15, 0.025}=2,131$ Άρα το 95% Δ.Ε. είναι: $[49,44-2,131 * 21,24/4, 49,44+2,131*21,24/4]=$
 $[38,12, 60,76]$

$t_{15, 0.005}=2,947$ Άρα το 99% Δ.Ε. είναι: $[49,44-2,947*21,24/4, 49,44+2,947*21,24/4]=$
 $[33,79, 65,09]$

X_i	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$
61,00	11,56	133,63
32,00	-17,44	304,15
35,00	-14,44	208,51
26,00	-23,44	549,43
25,00	-24,44	597,31
59,00	9,56	91,39
46,00	-3,44	11,83
99,00	49,56	2456,19
57,00	7,56	57,15
64,00	14,56	211,99
72,00	22,56	508,95
67,00	17,56	308,35
33,00	-16,44	270,27
23,00	-26,44	699,07
33,00	-16,44	270,27
59,00	9,56	91,39
791,00		6769,94