

4.2 Διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία

Αν η αναλογία στον πληθυσμό ισούται με p τότε η κατανομή της δειγματικής αναλογίας \hat{p} σε τυχαίο δείγμα μεγέθους n , όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο ($n > 30$), προσεγγίζει την κανονική $N(p, p(1-p)/n)$ και η μεταβλητή

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}$$

ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$. Συνεπώς το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη αναλογία μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της τυπικής κανονικής κατανομής:

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \Rightarrow \\ 1-\alpha &= P\left(-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \hat{p} - p \leq \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \Rightarrow \\ 1-\alpha &= P\left(-\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2} \leq -p \leq -\hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \Rightarrow \\ 1-\alpha &= P\left(\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2} \leq p \leq \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \end{aligned}$$

Άρα το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία θα είναι:

$$\left[\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2}, \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2} \right]$$

Παράδειγμα 4.3

Σε τυχαίο δείγμα από 2000 εκλογείς μιας χώρας οι 400 υποστηρίζουν το κόμμα Α. Να εκτιμηθεί διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα 95% για την αναλογία p των εκλογέων που υποστηρίζουν το κόμμα Α.

Έχουμε $\hat{p} = 400/2000 = 0,2$ και $z_{0,975} = 1,96$. Συνεπώς εκτιμούμε το ακόλουθο διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία p του πληθυσμού

$$\begin{aligned} &\left[\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2}, \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2} \right] = \\ &\left[0,2 - \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{2000}} 1,96, 0,2 + \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{2000}} 1,96 \right] = \\ &[0,2 - 0,018, 0,2 + 0,018] = [0,182, 0,218] \end{aligned}$$

με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.