

5 Παραμετρικοί Έλεγχοι Υποθέσεων

Μία στατιστική υπόθεση είναι μια δήλωση για μια ή περισσότερες κατανομές πληθυσμού η οποία ελέγχεται με βάση τις παρατηρήσεις ενός ή περισσότερων αντίστοιχα τυχαίων δειγμάτων.

Ανάλογα με το είδος των υποθέσεων οι οποίες μπορούν να γίνουν δεκτές, οι στατιστικοί έλεγχοι διακρίνονται στις ακόλουθες κατηγορίες: **Παραμετρικοί έλεγχοι** ονομάζονται οι έλεγχοι των υποθέσεων για μία ή περισσότερες παραμέτρους του πληθυσμού οι οποίοι γίνονται κάτω από την υπόθεση ότι η κατανομή του πληθυσμού είναι γνωστή (συνήθως κανονική). Ορισμένοι από τους ελέγχους αυτούς μπορούν να εφαρμοστούν και στην περίπτωση που αγνοούμε την κατανομή πληθυσμού, αρκεί να έχουμε μεγάλο μέγεθος δείγματος. **Μη παραμετρικοί έλεγχοι** ονομάζονται όλοι οι υπόλοιποι έλεγχοι. Έτσι μη παραμετρικοί είναι οι έλεγχοι για τη θέση ή την διασπορά μιας ή περισσότερων κατανομών πληθυσμού όπως και οι έλεγχοι για την τυχαιότητα του δείγματος. Στην κατηγορία αυτή υπάγονται και οι έλεγχοι για τη διάμεσο η οποία, αν και είναι παράμετρος πληθυσμού, δεν ορίζει ορισμένη συνάρτηση πιθανότητας. Οι μη παραμετρικοί έλεγχοι εφαρμόζονται όταν η κατανομή του πληθυσμού δεν μπορεί να υποθεθεί γνωστή και το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό.

Σε έναν έλεγχο υποθέσεων έχουμε τα παρακάτω στοιχεία: τη **μηδενική υπόθεση**, η οποία είναι αυτή που περιγράφει την υπάρχουσα κατάσταση και συμβολίζεται με H_0 . Την **εναλλακτική υπόθεση**, η οποία είναι αντίθετη της μηδενικής και η οποία υπαγορεύει αλλαγή ενεργειών. Η εναλλακτική υπόθεση ονομάζεται και υπόθεση έρευνας συμβολίζεται με H_e και δεν γίνεται δεκτή παρά μόνον αν την στηρίζουν τα δεδομένα μας. Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί η τιμή της δειγματικής παραμέτρου πέρα από την οποία θα θεωρήσουμε ότι το δείγμα δεν συνηγορεί υπέρ της μηδενικής υπόθεσης. Η λύση στο πρόβλημα αυτό θα δοθεί βάση την κατανομή πιθανοτήτων της παραμέτρου.

Η διαδικασία ελέγχου μιας στατιστικής υπόθεσης γίνεται σταδιακά ως εξής:

α. Προσδιορίζουμε τις υποθέσεις οι οποίες γίνονται δεκτές (για παράδειγμα δεχόμαστε ότι τα δεδομένα προέρχονται από κανονική κατανομή).

β. Εξειδικεύουμε την μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση. Η **μηδενική υπόθεση** περιγράφει την υπάρχουσα κατάσταση και συμβολίζεται με H_0 . Η **εναλλακτική υπόθεση** είναι αντίθετη της μηδενικής και υπαγορεύει αλλαγή ενεργειών. Η εναλλακτική υπόθεση ονομάζεται και υπόθεση έρευνας συμβολίζεται με H_e και δεν γίνεται δεκτή παρά μόνον αν την στηρίζουν τα δεδομένα μας. Ο ορισμός των παραπάνω δύο υποθέσεων πρέπει να γίνει έτσι ώστε οι δύο υποθέσεις να διαμερίζουν το σύνολο των δυνατών περιπτώσεων σε δύο υποσύνολα ξένα μεταξύ τους. Έτσι, αν δεν μπορούμε να δεχτούμε την ισχύ της μιας θα πρέπει να δεχτούμε την άλλη. Εναλλακτικά η απόρριψη της μιας συνεπάγεται την αποδοχή της άλλης.

γ. Ορίζουμε το **κριτήριο απόφασης** για την αποδοχή ή την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Για τον σκοπό αυτό επιλέγουμε:

(i) το **στατιστικό του ελέγχου** του οποίου η κατανομή πιθανοτήτων προσδιορίζεται τις υποθέσεις που γίνονται δεκτές, και τη μηδενική υπόθεση, και

(ii) το **επίπεδο σημαντικότητας α** του ελέγχου το οποίο συνήθως ορίζεται στις τιμές 0.10 ή 0.05 ή 0.001. Η τιμή ή οι τιμές του στατιστικού του ελέγχου οι οποίες αντιστοιχούν στο επίπεδο σημαντικότητας α ονομάζονται **κρίσιμες τιμές** και

προσδιορίζουν την περιοχή αποδοχής και την περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης.

δ. Παίρνουμε την απόφαση ως εξής: Αν η τιμή του στατιστικού του ελέγχου βρίσκεται στην περιοχή αποδοχής της H_0 , την δεχόμαστε, διαφορετικά, την απορρίπτουμε.

Ο έλεγχος μιας στατιστικής υπόθεσης είναι μια διαδικασία λήψης αποφάσεως στην οποία υπάρχουν αρχικά δύο δυνατές επιλογές: η αποδοχή ή η απόρριψη της H_0 . Για κάθε μία από τις επιλογές αυτές υπάρχουν δύο δυνατές καταστάσεις της φύσης (πραγματικότητες): η H_0 είναι σωστή ή είναι λανθασμένη. Υπάρχουν δηλαδή οι εξής 4 ξένες μεταξύ τους δυνατές περιπτώσεις: (i) Δεχόμαστε την H_0 και η H_0 να είναι ορθή. (ii) Δεχόμαστε την H_0 και η H_0 είναι λανθασμένη, (iii) Απορρίπτουμε την H_0 και η H_0 να είναι ορθή. (iv) Απορρίπτουμε την H_0 και η H_0 είναι λανθασμένη.

Επειδή η απόφαση που παίρνουμε για το αν θα δεχθούμε ή θα απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση βασίζεται αποκλειστικά σε μια τιμή μιας στατιστικής (η οποία είναι τυχαία μεταβλητή) κινδυνεύουμε να πάρουμε εσφαλμένη απόφαση. Και αυτό μπορεί να συμβεί στις περιπτώσεις (ii) και (iii). Ειδικότερα:

- Όταν απορρίπτουμε την H_0 ενώ είναι σωστή έχουμε σφάλμα τύπου I. Η πιθανότητα του σφάλματος αυτού ισούται με το επίπεδο σημαντικότητας α του ελέγχου.
- Όταν δεχόμαστε την H_0 ενώ είναι λανθασμένη οπότε έχουμε σφάλμα τύπου II. Η πιθανότητα του σφάλματος αυτού συμβολίζεται με β .

Όπως θα δούμε ειδικότερα στη συνέχεια της ανάλυσης, η πιθανότητα σφάλματος του ενός τύπου είναι αντιστρόφως ανάλογη με την πιθανότητα του άλλου. Στην κλασική Στατιστική ο ερευνητής επιλέγει το επίπεδο σημαντικότητας με βάση το οποίο ορίζεται το κριτήριο αποφάσεως και στη συνέχεια δέχεται την πιθανότητα β που προκύπτει.

Ο τρόπος με τον οποίο εξειδικεύεται η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος. Ειδικότερα διακρίνουμε:

Ένα πρόβλημα ελέγχου ονομάζεται **δίπλευρο** αν οι αποκλίσεις προς οποιαδήποτε κατεύθυνση από τη μηδενική υπόθεση επιβάλλουν διαφορετική ενέργεια από αυτήν που υπαγορεύεται από την μηδενική υπόθεση.

Έτσι π.χ. δίπλευρος είναι ο έλεγχος της ποιότητας ενός κυλίνδρου ο οποίος χρησιμοποιείται για τη συναρμολόγηση σωλήνων διότι ο κύλινδρος είναι ελαττωματικός όταν η διάμετρος του είναι είτε πολύ μεγαλύτερη είτε πολύ μικρότερη από την επιθυμητή. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι η μέση διάμετρος μ όλων των παραγομένων κυλίνδρων είναι όση η επιθυμητή την οποία συμβολίζουμε με μ_0 και η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση εξειδικεύεται ως εξής:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_a : \mu \neq \mu_0$$

Ένα πρόβλημα ελέγχου ονομάζεται **μονόπλευρο** αν μόνον οι αποκλίσεις προς μία κατεύθυνση από την μηδενική υπόθεση επιβάλλουν διαφορετική ενέργεια από ότι στη μηδενική υπόθεση.

Ο μονόπλευρος έλεγχος ονομάζεται **αριστερόπλευρος** ή **δεξιόπλευρος** ανάλογα με την κατεύθυνση που μας ενδιαφέρει. Παράδειγμα αριστερόπλευρου ελέγχου είναι ο

έλεγχος του μέσου βάρους ενός προϊόντος που γίνεται για λογαριασμό των καταναλωτών οι οποίοι σκοπεύουν να καταγγείλουν τον παραγωγό αν τα προϊόντα του είναι ελλιποβαρή, δηλαδή έχουν μέσο βάρος μικρότερο από την δηλωμένη τιμή, έστω μ_0 . Στην περίπτωση αυτή, η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση εξειδικεύονται ως εξής:

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_e : \mu < \mu_0$$

Αν τώρα ο έλεγχος γίνεται για λογαριασμό του παραγωγού ο οποίος ενδιαφέρεται το μέσο βάρος να μην ξεπερνά το αναγραφόμενο με βάση το οποίο κοστολογεί το προϊόν τότε έχουμε ένα πρόβλημα δεξιόπλευρου ελέγχου στον οποίο η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση εξειδικεύονται ως εξής:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_e : \mu > \mu_0$$

Η βασική στρατηγική την οποία ακολουθούμε στην εξειδίκευση της μηδενικής και της εναλλακτικής υπόθεσης είναι να στηρίζουμε την υπόθεση έρευνας απορρίπτοντας την μηδενική υπόθεση. Όπως θα δούμε ειδικότερα στη συνέχεια της ανάλυσης, το καθεστώς της μηδενικής και της εναλλακτικής υπόθεσης δεν είναι ισοδύναμο. Γίνεται δεκτό ότι η μηδενική υπόθεση ισχύει μέχρις ότου από τα δεδομένα προκύψουν ισχυρές ενδείξεις για το αντίθετο. Ή, για να χρησιμοποιήσουμε δικαστική ορολογία, η μηδενική υπόθεση θεωρείται αρχικά ότι ισχύει και το «βάρος της αποδείξεως του εναντίον» είναι στο δείγμα. Έτσι, ενώ όταν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση μπορούμε με σχετική σιγουριά να πούμε ότι δεν ισχύει, όταν την δεχόμαστε δεν έχουμε την ίδια σιγουριά για την ισχύ της. Γι' αυτό πολλοί συγγραφείς προτιμούν να χρησιμοποιούν την έκφραση «δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0 » αντί για την έκφραση «δεχόμαστε την H_0 ».

Σημείωση: Θα πρέπει να τονιστεί ένα σημείο στη διαδικασία του ελέγχου των υποθέσεων που συνήθως δεν γίνεται πάντα κατανοητό. Όταν κάνουμε π.χ. τον δεξιόπλευρο έλεγχο για την μέση τιμή, δηλαδή

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_e : \mu > \mu_0$$

αρκεί να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση στην ισότητα που αντιπροσωπεύει το ακρότατο όριο ισχύος της. Γι' αυτό οι δύο υποθέσεις γράφονται ως

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_e : \mu > \mu_0$$

Είναι προφανές ότι όταν απορρίπτουμε την υπόθεση $\mu = \mu_0$ υπέρ της $\mu > \mu_0$ θα απορρίπτουμε με μεγαλύτερη έμφαση την υπόθεση $\mu < \mu_0$. Με βάση τη συλλογιστική αυτή σε όλους τους μονόπλευρους παραμετρικούς ελέγχους που παρουσιάζονται στη συνέχεια η μηδενική υπόθεση εξειδικεύεται στην ισότητα.