4.3 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση

Αν s^2 η διακύμανση τυχαίου δείγματος μεγέθους n από μία κανονική τυχαία μεταβλητή με διακύμανση σ^2, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $v = n$-1 βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς το 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της χι-τετράγωνο κατανομής:

Έχουμε:

$$1-a = P\left(\chi^2_{v,1-a/2} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{v,a/2} \right) \Rightarrow$$

$$1-a = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{v,a/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{v,1-a/2}} \right)$$

Επομένως, αν σε ορισμένο δείγμα n στοιχείων υπολογίσουμε τη διακύμανση s^2, τότε εκτιμούμε ότι το διάστημα που θα περιέχει την διακύμανση πληθυσμού σ^2 με επίπεδο εμπιστοσύνης 1-α είναι το:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{v,a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{v,1-a/2}} \right]$$

Παράδειγμα 4.4

Μας δίνεται ότι η ηλικία ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω ότι από αυτό τον πληθυσμό έχουμε το παρακάτω δείγμα: 61, 32, 35, 26, 25, 59, 46, 99, 57, 64, 72, 67, 33, 23, 33, 59. Να βρεθεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά του πληθυσμού..

Για 1-α=0,95 και α/2=0,025 από τον πίνακα της κατανομής χ^2 βρίσκουμε:

$X^2_{15,\,0.025}$=27,49 και $X^2_{15,\,0.975}$=6,26. Άρα το 95% Δ.Ε. είναι:
[15*451,33/27,49, 15*451,33/6,26]= [246,27, 1082,46]