5.1 Έλεγχος για τη μέση τιμή

Ο έλεγχος για τη μέση τιμή πληθυσμού γίνεται με βάση την κατανομή της δειγματικής μέσης τιμής υπολογίζεται σε τυχαίο δείγμα μεγέθους n. Ανάλογα με τις υποθέσεις για την κατανομή πληθυσμού, οι οποίες μπορούν να γίνουν δεκτές, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

5.1.1 Κατανομή πληθυσμού Κανονική με διακύμανση σ^2 γνωστή

Στην περίπτωση αυτή η κατανομή της δειγματικής μέσης τιμής είναι η κανονική με μέση τιμή την μέση τιμή πληθυσμού και διακύμανση την σ^2/n. Επομένως ο έλεγχος για τη μέση τιμή θα γίνεται σταδιακά ως εξής:

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Κατανομή πληθυσμού κανονική και σ^2 γνωστή.

β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = \mu_0 \\ H_\varepsilon &: \text{(i)} \ \mu \neq \mu_0 \\ & \quad \text{(ii)} \ \mu > \mu_0 \\ & \quad \text{(iii)} \ \mu < \mu_0 \end{aligned}$$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Κάτω από τις υποθέσεις που ορίζονται στο (α) και την μηδενική υπόθεση η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί την $N(0,1)$. Συμβολίζουμε με $z_{1-\alpha}$ και $z_{1-\alpha/2}$ τις τιμές της Z για τις οποίες ισχύει:

$$P(Z > z_{1-\alpha}) = P(Z < -z_{1-\alpha}) = \alpha, \text{ και}$$

$$P(Z > z_{1-\alpha/2}) + P(Z < -z_{1-\alpha/2}) = \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$$

Έστω το στατιστικό z_π

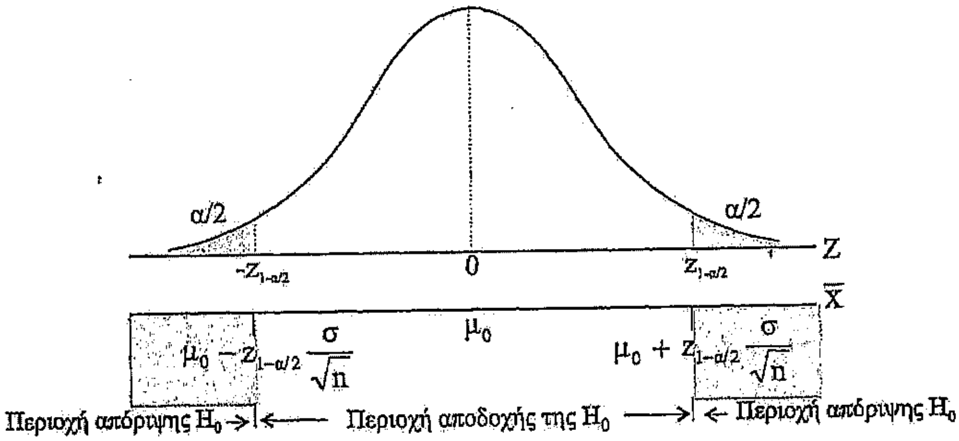
$$z_\pi = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

δ. Η απόφαση: Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, για τα τρία είδη ελέγχου αντίστοιχα, αν:

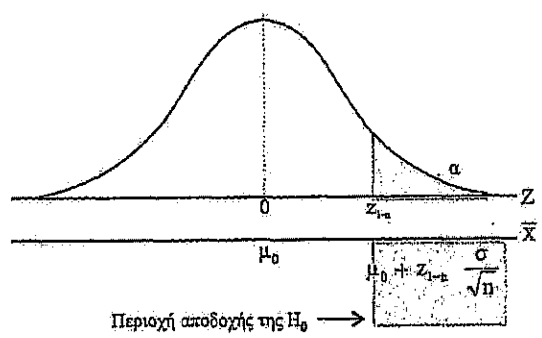
$$(i)\, |z_\pi| > z_{1-\alpha/2}, \quad (ii)\, z_\pi > z_{1-\alpha}, \quad (iii)\, z_\pi < -z_{1-\alpha}$$

Οι περιοχές αποδοχής και απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, για τα τρία είδη ελέγχου, δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:

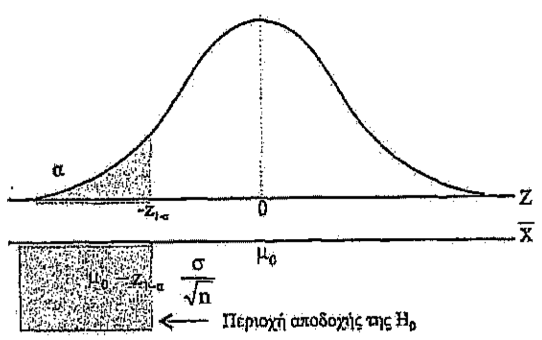
i) H_0: $\mu = \mu_0$
H_ε: μ μ_0



$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_\varepsilon : \mu > \mu_0$$



$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_\varepsilon : \mu < \mu_0$$



Το επίπεδο σημαντικότητας α καθώς και το κριτήριο αποφάσεως ορίζονται συνήθως πριν από τη δειγματοληψία. Μετά την παρατήρηση των στοιχείων του δείγματος μπορούμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο επίπεδο σημαντικότητας στο οποίο μπορεί να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση και το οποίο ονομάζεται **τιμή πιθανότητας** ή ***p*-τιμή** ή **πιθανότητα σημαντικότητας** του ελέγχου.

Αν z_π είναι η παρατηρούμενη τιμή της Z, η p-τιμή του ελέγχου είναι η πιθανότητα να παρατηρήσουμε για την Z μια τιμή τουλάχιστο τόσο ακραία, όσο αυτή που παρατηρήσαμε όταν ισχύει η H_0. Έτσι, για τα τρία είδη ελέγχου, αντίστοιχα, έχουμε:

$$(i)\ p = 2P(Z > |z_\pi|)$$
$$(ii)\ p = P(Z > z_\pi)$$
$$(iii)\ p = P(Z < z_\pi)$$

Όταν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση λέμε ότι η διαφορά ανάμεσα στην παρατηρούμενη μέση τιμή του δείγματος και την μ_0 είναι στατιστικά σημαντική και, με πιθανότητα σφάλματος α, δεν μπορεί να αποδοθεί στις διακυμάνσεις της δειγματοληψίας. Όταν η p-τιμή του ελέγχου είναι μικρότερη από α έχουμε μεγαλύτερη εμπιστοσύνη για την στατιστική σημαντικότητα της παρατηρούμενης διαφοράς, και συνεπώς για την ισχύ της H_ε.

Παράδειγμα 5.1

Σε εκτεταμένη εμπειρική έρευνα που έγινε το 1960 βρέθηκε ότι το βάρος γεννήσεως των μη πρόωρων βρεφών προσεγγίζει πολύ καλά την N(3300, 900). Σε τυχαίο δείγμα n=20 βρεφών που γεννήθηκαν το 1985 βρέθηκε μέσο βάρος 3380. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, να ελεγχθεί η υπόθεση ότι το μέσο βάρος γεννήσεως δεν αυξήθηκε στο χρονικό διάστημα μεταξύ 1960 - 85 σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία ελέγχου έχουμε:

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Η κατανομή πληθυσμού κανονική με

$\sigma = \sqrt{900} = 30$

β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση

H_0: $\mu = 3300$

H_ε: $\mu > 3300$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Για α=0.05 έχουμε $z_{1-\alpha} = z_{0,95}$=1,65 Επομένως αν

$$z_\pi = \frac{\bar{x} - 3300}{30/\sqrt{20}} > 1.65$$

θα απορρίψουμε την H_0

δ. Η απόφαση: επειδή

$$z_\pi = \frac{3380 - 3300}{30/\sqrt{20}} = 11.92 > 1.65$$

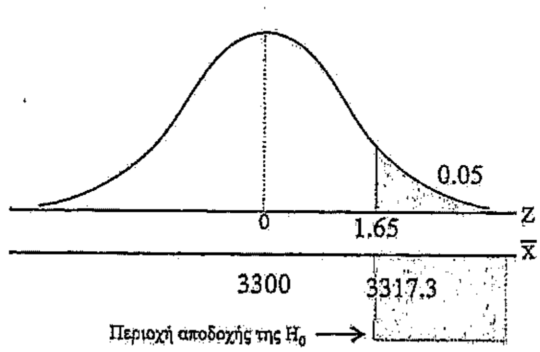
απορρίπτουμε την H_0.

Η τιμή πιθανότητας του ελέγχου ισούται με:

$$\text{p-τιμή} = P(Z > 11.92) = 0.00002$$

Δηλαδή η μηδενική υπόθεση θα απορριφθεί για οποιοδήποτε επίπεδο σημαντικότητας μεγαλύτερο από 0.00002.

Οι περιοχές απόρριψης και αποδοχής δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



0.05
Z
0
1.65
$\overline{X}$
3300
3317.3
Περιοχή αποδοχής της H_0