5.1.2 Κατανομή πληθυσμού Κανονική με διακύμανση άγνωστη

Όταν αγνοούμε την μέση τιμή πληθυσμού συνήθως αγνοούμε και την διακύμανση του και την εκτιμούμε με την τιμή της δειγματικής διακύμανσης. Αν έχουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους *n* από έναν κανονικό πληθυσμό, είδαμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί την κατανομή student με $\nu = n$-1 βαθμούς ελευθερίας. Επομένως ο έλεγχος για τη μέση τιμή πληθυσμού θα γίνει σταδιακά ως εξής:

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Η κατανομή πληθυσμού είναι κανονική

β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = \mu_0 \\ H_\varepsilon &: \text{(i)} \quad \mu \neq \mu_0 \\ &\quad \text{(ii)} \quad \mu > \mu_0 \\ &\quad \text{(iii)} \quad \mu < \mu_0 \end{aligned}$$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Συμβολίζουμε με $t_{\nu,\alpha}$ και $t_{\nu,\alpha/2}$ τις τιμές της κατανομής student με ν βαθμούς ελευθερίας για τις οποίες ισχύει αντίστοιχα:

$$P(t_\nu > t_{\nu,\alpha}) = P(t_\nu < -t_{\nu,\alpha}) = \alpha, \text{ και}$$

$$P(t_\nu > t_{\nu,\alpha/2}) + P(t_\nu < t_{\nu,\alpha/2}) = \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$$

Έστω το στατιστικό:

$$t_\pi = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

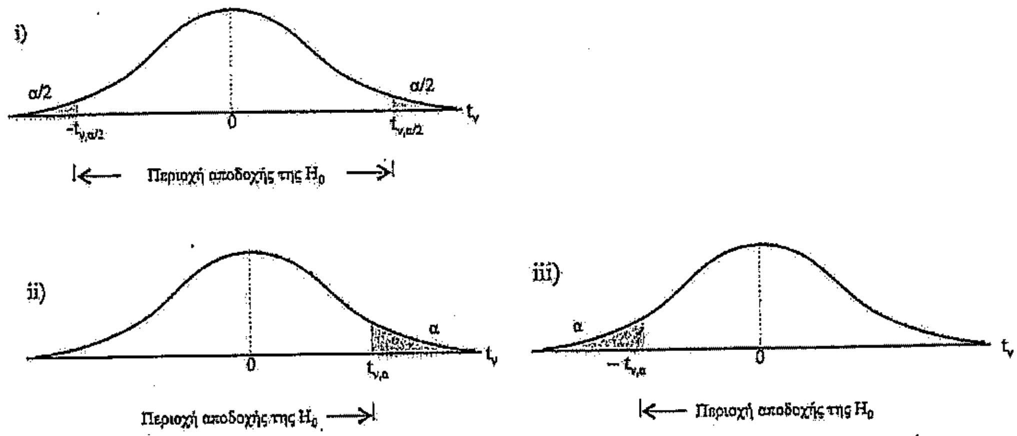
δ. Η Απόφαση: Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για τα τρία είδη ελέγχου, αντίστοιχα, αν:

(i) $|t_\pi| > t_{\nu,\alpha/2}$

(ii) $t_\pi > t_{\nu,\alpha}$

(iii) $t_\pi < -t_{\nu,\alpha}$

Οι περιοχές απόρριψης και αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης δίνονται για τα τρία είδη ελέγχου, στο σχήμα που ακολουθεί:



Παράδειγμα 5.2

Αυτόματο μηχάνημα κόβει μεταλλικά ελάσματα των οποίων το μήκος X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μ=5cm. Ένα περίπου 24ωρο πριν την εμφάνιση βλάβης, το μήκος των ελασμάτων μειώνεται οπότε, εκτός από την τακτική συντήρηση του μηχανήματος, καθημερινά μετριέται το μήκος σε τυχαίο δείγμα n=20 ελασμάτων. Αν στο δείγμα μιας μέρας υπολογίσαμε μέσο μήκος 4.5cm και s=1cm, να ελεγχθεί η υπόθεση ότι το μέσο μήκος στο σύνολο της παραγωγής δεν μειώθηκε σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,01.

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Η κατανομή πληθυσμού είναι κανονική.

β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

$$H_0: \mu = 5$$
$$H_\varepsilon: \mu < 5$$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Για v=n-1=19 βαθμούς ελευθερίας και α=0.01 βρίσκουμε από τον πίνακα της t-κατανομής $t_{19,0.01}$=2.539.

Επομένως .αν

$$t_\pi = \frac{\overline{x}-5}{s/\sqrt{20}} < -2.539$$

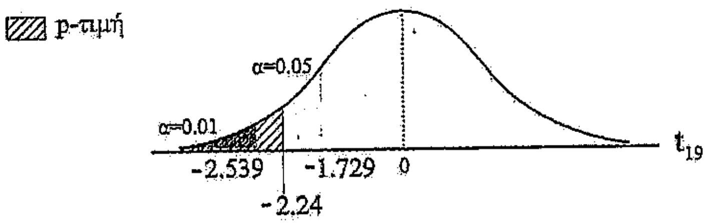
θα απορρίψουμε την H_0, υπέρ της H_ε.

δ. Η απόφαση: Επειδή

$$t_\pi = \frac{4.5-5}{1/\sqrt{20}} = -2.24 > -2.539$$

δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0.

Σημείωση: Η μηδενική υπόθεση όμως απορρίπτεται για μεγαλύτερα επίπεδα σημαντικότητας, π.χ. για α=0.05. Πράγματι, $t_{19,0.05}$=1.729 και ισχύει t_π>-1.729. Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε ότι η τιμή πιθανότητας του ελέγχου είναι μεταξύ του 1% και 5%.


p-τιμή
α=0.05
α=0.01
-2.539
-1.729
0
-2.24
t19