5.2 Έλεγχος για τη διακύμανση

Οι στατιστικοί έλεγχοι για την διακύμανση ενός πληθυσμού είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στον έλεγχο της ποιότητας ενός προϊόντος στο οποίο η μεταβλητότητα των χαρακτηριστικών του όπως το βάρος, το ύψος, η αντοχή, η ακρίβεια των μετρήσεων που κάνει κ.τ.λ. δεν πρέπει να υπερβαίνουν ορισμένα όρια. Στις περισσότερες από τις περιπτώσεις αυτές η κατανομή πληθυσμού μπορεί να υποτεθεί κανονική. Είδαμε ότι αν s είναι η διακύμανση δείγματος n στοιχείων από έναν κανονικό πληθυσμό με διακύμανση σ^2 τότε η τυχαία μεταβλητή

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $v=n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Επομένως ο έλεγχος μιας στατιστικής υπόθεσης για την διακύμανση πληθυσμού θα γίνει σταδιακά ως εξής:

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Η κατανομή πληθυσμού κανονική, το δείγμα τυχαίο.

β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

$$\begin{aligned} H_0:&\quad \sigma = \sigma_0^2 \\ H_\varepsilon: (i)&\quad \sigma \neq \sigma_0^2 \\ (ii)&\quad \sigma > \sigma_0^2 \\ (iii)&\quad \sigma < \sigma_0^2 \end{aligned}$$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Έστω $\chi^2_{v,\alpha}$ και $\chi^2_{v,1-\alpha}$ οι τιμές της κατανομής χ^2 με $v=n-1$ βαθμούς ελευθερίας για τις οποίες ισχύει:

$$P(\chi_v^2 > \chi_{v,\alpha}^2) = \alpha \quad \text{και} \quad P(\chi_v^2 < \chi_{v,1-\alpha}^2) = 1-\alpha$$

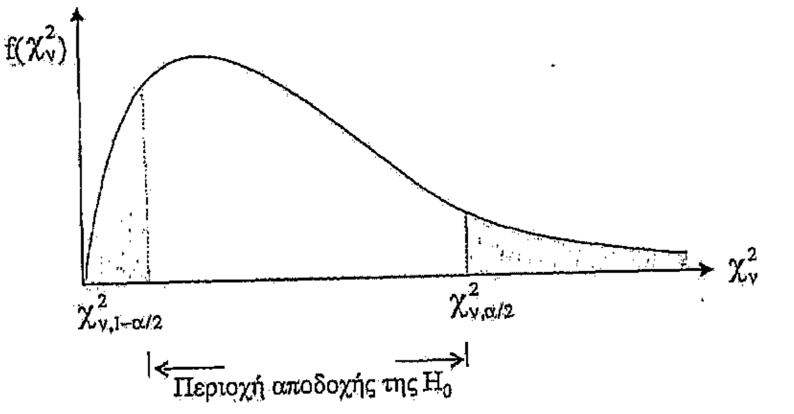
Αν s^2 η διακύμανση σε ορισμένο δείγμα μεγέθους η τότε υπολογίζουμε:

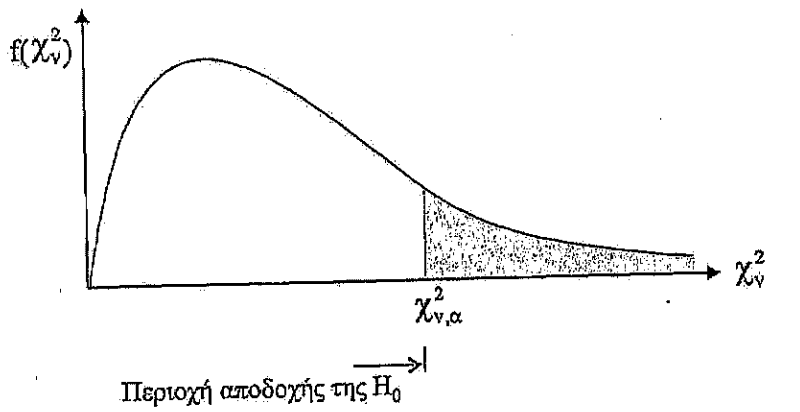
$$\chi_\pi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

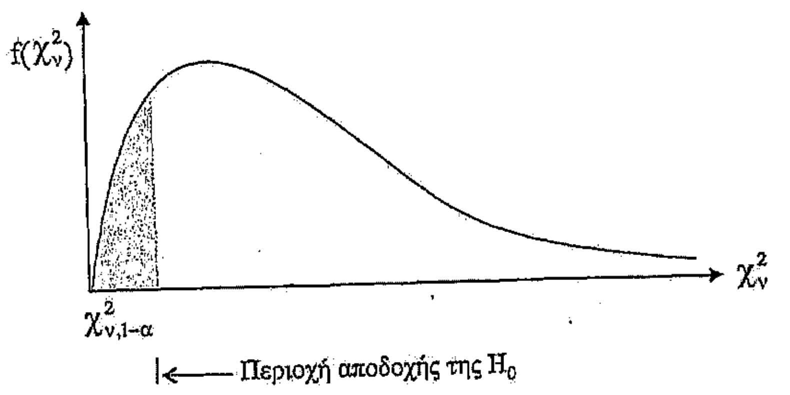
δ. Απόφαση: Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, για τα τρία είδη ελέγχου αντίστοιχα, αν

$$\begin{aligned} &(i)\ \chi_\pi^2 < \chi_{v,1-\alpha/2}^2 \ \text{ ή } \ \chi_\pi^2 > \chi_{v,\alpha/2}^2 \\ &(ii)\ \chi_\pi^2 > \chi_{v,\alpha}^2 \\ &(iii)\ \chi_\pi^2 < \chi_{v,1-\alpha}^2 \end{aligned}$$

Οι περιοχές αποδοχής και απόρριψης της H_0 για τα τρία είδη ελέγχου, δίνονται στα σχήματα που ακολουθούν:







Παράδειγμα 5.4

Αυτόματο μηχάνημα παράγει ατσάλινο σύρμα στο οποίο σύμφωνα με τις προδιαγραφές του μηχανήματος, η τυπική απόκλιση της αντοχής του δεν υπερβαίνει τα 5 κιλά. Αν σε 16 δοκιμές σε τυχαία σημεία του παραγόμενου σύρματος μετρήσαμε την αντοχή και υπολογίσαμε s=5.6 κιλά να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.01 αν το μηχάνημα ικανοποιεί τις προδιαγραφές αγοράς του. Η κατανομή της αντοχής του ατσάλινου σύρματος μπορεί να υποτεθεί κανονική. Ο ζητούμενος έλεγχος θα γίνει σταδιακά ως εξής:

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Η κατανομή πληθυσμού είναι κανονική και το δείγμα τυχαίο.
β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

$$H_0: \sigma^2 = 25$$
$$H_\varepsilon: \sigma^2 > 25$$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Για α=0.01 και $v=n$-1 βαθμούς ελευθερίας έχουμε $\chi^2_{15,0.01}$=30.58. Επομένως αν

$$\frac{15s^2}{25} > 30.58$$

θα απορρίψουμε την H_0 υπέρ της H_ε.
δ. Η απόφαση: Υπολογίζουμε $s^2=(5.6)^2=31.36$. Επειδή

$$\frac{15(31.36)}{25} = 18.8 < 30.58$$

η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί στο επίπεδο σημαντικότητας α=0.01.
Η τιμή πιθανότητας του ελέγχου δίνεται ως σκιασμένη επιφάνεια στο ακόλουθο σχήμα: