5.4 Έλεγχος της διαφοράς δύο μέσων. Ζευγαρωτές παρατηρήσεις

Σε πολλές εμπειρικές έρευνες μας ενδιαφέρει η σύγκριση ενός χαρακτηριστικού του πληθυσμού πριν και μετά την μεταβολή ενός εξωτερικού παράγοντα -πριν και μετά την εισαγωγή μιας μεταβλητής ελέγχου. Στις περιπτώσεις αυτές παίρνουμε με απλή τυχαία δειγματοληψία η στοιχεία του πληθυσμού και παρατηρούμε το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει πριν και μετά την μεταβολή του εξωτερικού παράγοντα. Ή, ισοδύναμα, παίρνουμε με απλή τυχαία δειγματοληψία *n* ζεύγη στοιχείων τα οποία φροντίζουμε να είναι όμοια και στο δεύτερο στοιχείο κάθε ζεύγους εισάγουμε τη μεταβλητή ελέγχου. Έτσι π.χ. για να μελετήσουμε την επίδραση ενός φαρμάκου θα συγκρίνουμε ασθενείς, οι οποίοι έχουν ανά δύο τα ίδια χαρακτηριστικά αλλά μόνον ο ένας παίρνει το φάρμακο. Προκύπτουν έτσι η ζεύγη παρατηρήσεων οι οποίες ανά δύο δεν είναι ανεξάρτητες αφού γίνονται στο ίδιο στοιχείο ή σε δύο ομοιογενή στοιχεία του πληθυσμού. Εδώ θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο ελέγχουμε την υπόθεση της ισότητας δύο μέσων πληθυσμού με βάση *n* ζεύγη παρατηρήσεων σε τυχαίο δείγμα *n* στοιχείων.

Η τυχαία μεταβλητής $D=X_1-X_2$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_1-\mu_2$. Στην περίπτωση αυτή είδαμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$$t=\frac{\overline{D}-(\mu_1-\mu_2)}{S_D/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί την κατανομή student με $v=n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Επομένως ο έλεγχος της ισότητας των μ_1 και μ_2 θα γίνει σταδιακά ως εξής:

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Οι δύο κατανομές πληθυσμού είναι κανονικές και το δείγμα των διαφορών είναι τυχαίο

β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

$$\begin{array}{lll} H_0: & & \mu_1=\mu_2 \\ H_\varepsilon: & \text{(i)} & \mu_1\neq\mu_2 \\ & \text{(ii)} & \mu_1>\mu_2 \end{array}$$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Υπολογίζουμε:

$$\overline{d}=\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n},\quad s_d^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\overline{d})^2}{n-1},\ \text{και}$$

$$t_\pi=\frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

δ. Η απόφαση: Η μηδενική υπόθεση θα απορριφθεί για τον δίπλευρο και τον μονόπλευρο έλεγχο, αντίστοιχα, αν

$$\text{(i) } |t_\pi|>t_{n-1,\alpha/2}$$

$$\text{(ii) } t_\pi>t_{n-1,\alpha}$$

Παράδειγμα 5.7

Ο υπεύθυνος μεγάλης επιχείρησης παραγωγής μεταλλικών προϊόντων θέλει να αγοράσει καινούργια μηχανήματα κοπής φύλλων μετάλλου. Για να ελέγξει αν η απόδοση των μηχανημάτων της Α και της Β μάρκας διαφέρουν, πήρε τυχαίο δείγμα από 12 εργάτες οι οποίοι την πρώτη μέρα χειρίζονται τα μηχανήματα της Α μάρκας και τη δεύτερη της Β μάρκας. Για κάθε έναν από τους εργάτες κατέγραψε τον αριθμό των φύλλων που έκοψε ημερησίως και πήρε τα εξής αποτελέσματα:

Εργάτης		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Μηχάνημα Α	X_1	80	95	104	117	79	95	100	83	79	80	98	104
Μηχάνημα Β	X_2	88	105	102	107	80	98	110	74	86	84	90	108
	D	-8	-10	2	10	-1	-3	-10	9	-7	-4	8	-4

Αν μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο αριθμός των μεταλλικών φύλλων που κόβει μία μηχανή ακολουθεί την κανονική κατανομή, να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η απόδοση των δύο μηχανημάτων είναι ίδια για τις δύο μάρκες σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05.

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Η κατανομή πληθυσμού είναι κανονική και για τις δύο μηχανές, το δείγμα των διαφορών είναι τυχαίο.

β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$
$$H_\varepsilon: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Για α=0.05, α/2 = 0.025 και ν=*n*-1=12-1=11 έχουμε $t_{11,0.025}$=2.201. Επομένως αν

$$|t| = \frac{|\bar{d}|}{s_d/\sqrt{n}} > 2.201$$

θα απορρίψουμε την H_0 υπέρ της H_ε.

δ. Η απόφαση: Υπολογίζουμε

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{-8-10+2+10-1-3-10+9-7-4+8-4}{10} = -1.8$$

$$s_d^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1} = \frac{604 - 12(-1.8)^2}{11} = 56.87$$

και $s_d = \sqrt{56.87} = 7.54$.

Επειδή

$$|t| = \frac{1.8}{7.54/\sqrt{12}} = 0.83 < 2.201$$

δεν απορρίπτουμε την H_0 σε αυτό το επίπεδο σημαντικότητας.

Για επίπεδο σημαντικότητας α = 0.01 έχουμε:

$$t_{11(\alpha/2)} = t_{11(0.005)} = 3.106$$

Επομένως η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί σ' αυτό το επίπεδο σημαντικότητας. Η τιμή πιθανότητας του ελέγχου δίνεται ως σκιασμένη επιφάνεια στο σχήμα που ακολουθεί: