5.5 Έλεγχος της ισότητας δύο διακυμάνσεων

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές προκύπτει η ανάγκη σύγκρισης των διακυμάνσεων δύο πληθυσμών. Έτσι π.χ. αν ένα μηχάνημα αξιολογείται με βάση την ομοιογένεια του παραγόμενου προϊόντος, τότε θα συγκρίνουμε δύο μηχανήματα, συγκρίνοντας τις διακυμάνσεις ενός χαρακτηριστικού ποιότητας του προϊόντος. Εξάλλου είδαμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις για να κάνουμε τον έλεγχο για την διαφορά δύο μέσων τιμών πληθυσμού θα πρέπει να ισχύει η υπόθεση της ισότητας των δύο διακυμάνσεων.

Αν s_1^2 είναι η διακύμανση τυχαίου δείγματος n_1 στοιχείων από έναν κανονικό πληθυσμό με διακύμανση σ_1^2 και s_2^2 η διακύμανση τυχαίου δείγματος n_2 στοιχείων από έναν κανονικό πληθυσμό με διακύμανση σ_2^2 και τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα τότε, η τυχαία μεταβλητή

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

ακολουθεί την κατανομή F με $v_1=n_1-1$ και $v_2=n_2-1$ βαθμούς ελευθερίας. Η υπόθεση της ισότητας των δύο διακυμάνσεων ελέγχεται σταδιακά ως εξής:

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Οι δύο κατανομές πληθυσμού είναι κανονικές και τα δείγματα τυχαία και ανεξάρτητα.

β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$$

$$H_\varepsilon: \text{(i)}\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq 1$$

$$\text{(ii)}\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1$$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Υπολογίζουμε:

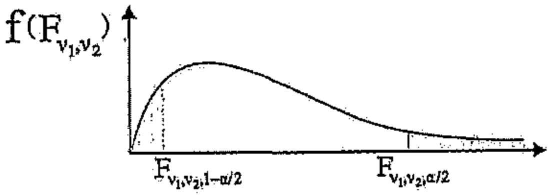
$$F_\pi=\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

δ. Η απόφαση: Η μηδενική υπόθεση θα απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας α, για τα δύο είδη ελέγχου, αντίστοιχα, αν:

$$(\iota)\ F_\pi > F_{v_1,v_2,\alpha/2} \quad | \quad F_\pi < F_{v_1,v_2,1-\alpha/2} = 1/F_{v_2,v_1,\alpha/2}$$

$$(\iota\iota)\ F_\pi > F_{v_1,v_2,\alpha}$$

Οι περιοχές απόρριψης και αποδοχής δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Παράδειγμα 5.8

Σε τυχαίο δείγμα n_1=9 λαμπτήρων της μάρκας Α υπολογίσαμε τη διακύμανση της διάρκειας ζωής s_1^2= 66 και σε τυχαίο δείγμα ίσου μεγέθους από την μάρκα Β υπολογίσαμε s_2^2=44. Να ελεγχθεί η υπόθεση της ισότητας των διακυμάνσεων στην διάρκεια ζωής X_1 και X_2 των λαμπτήρων της Α και Β μάρκας, αντίστοιχα, σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.10 αν η κατανομή των X_1 και X_2 μπορεί να υποτεθεί κανονική.

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: κανονικές κατανομές και τα δύο δείγματα τυχαία και ανεξάρτητα.

β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_\varepsilon : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Για α=0.10, α/2 = 0.05 και v_1=v_2=9-1=8. Έχουμε: $F_{8,8,0.05}$=3.44 και $F_{8,8,0.95}$=1/3.44 = 0.29. Επομένως αν

$$F_\pi = \frac{s_1^2}{s_2^2} > 3.44 \quad ή \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} < 0.29$$

θα απορρίψουμε την H_0.

δ. Η απόφαση: Επειδή F_π=1.5 και 0.29<1.5<3.44 η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί στο επίπεδο σημαντικότητας 0.05.

Η τιμή πιθανότητας του ελέγχου είναι η σκιασμένη επιφάνεια που δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.