5.8 Ο δίπλευρος έλεγχος των παραμετρικών υποθέσεων και το διάστημα εμπιστοσύνης

Ο έλεγχος μιας στατιστικής υπόθεσης για την τιμή μιας παραμέτρου στον πληθυσμό, και η εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης, είναι δύο τεχνικές αλληλοεξαρτώμενες και αλληλοσυμπληρούμενες. Θα δούμε την αλληλεξάρτηση αυτή με το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα: Η διάρκεια ζωής Χ μιας λυχνίας ορισμένης μάρκας ακολουθεί, σύμφωνα με τις προδιαγραφές της παραγωγού επιχείρησης, την Ν(300, 256). Ο αγοραστής μιας μεγάλης παρτίδας ενδιαφέρεται ιδιαίτερα η μέση τιμή να μην διαφέρει από 300 ώρες και πριν την παραλαβή της παρτίδας την υποβάλει σε δειγματοληψία αποδοχής. Αν σε τυχαίο δείγμα n=25 προϊόντων υπολόγισε μέση τιμή 295 ώρες θα δεχτεί ή θα απορρίψει την παραγγελία; (α=0.05)

α. Υποθέσεις που γίνονται δεκτές: Η κατανομή της διάρκειας ζωής του λαμπτήρα είναι κανονική με διακύμανση σ^2=256 και το δείγμα είναι τυχαίο.
β. Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση:

H_0: $\mu = 300$
H_ε: $\mu \neq 300$

γ. Το κριτήριο αποφάσεως: Αν

$$|z_\pi| = \frac{|\bar{x}-300|}{\sqrt{256/25}} > z_{1-\alpha/2} = 1.96$$

θα απορρίψουμε την H_0 στο επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.
δ. Η απόφαση: Επειδή

$$|z_\pi| = \frac{|295-300|}{\sqrt{256/25}} = 1.56 < 1.96$$

η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι για να καθορίσει τον χρόνο εγγύησης των τηλεοράσεων η επιχείρηση θέλει να εκτιμήσει το διάστημα το οποίο με επίπεδο εμπιστοσύνης 95% θα περιέχει τη μέση διάρκεια ζωής των λαμπτήρων. Το διάστημα αυτό είναι το εξής:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow 295 - 1.96\sqrt{\frac{256}{25}} \leq \mu \leq 295 + 1.96\sqrt{\frac{256}{25}}$$

$$\Leftrightarrow 288.73 \leq \mu \leq 301.27$$

Παρατηρούμε ότι το διάστημα αυτό περιέχει την τιμή μ = 300, δηλαδή την τιμή της μηδενικής υπόθεσης την οποία δεχτήκαμε ότι ισχύει.

Γενικά για τους δίπλευρους παραμετρικούς ελέγχους που είδαμε στο κεφάλαιο αυτό ισχύει ότι το διάστημα εμπιστοσύνης με 1-α περιέχει όλες τις τιμές H_0 οι οποίες δεν απορρίπτονται στο επίπεδο σημαντικότητας α. Και, αντίστροφα, η υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή στο επίπεδο σημαντικότητας α αν και μόνον αν το διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα 1-α περιέχει την H_0.

Σημείωση: Η ισοδυναμία του δίπλευρου ελέγχου και του διαστήματος εμπιστοσύνης δεν ισχύει στην περίπτωση της αναλογίας πληθυσμού. Αυτό επειδή στο δίπλευρο έλεγχο της H_0: $p=p_0$ η διακύμανση της δειγματικής αναλογίας $\hat{p}$ ορίζεται πλήρως από την μηδενική υπόθεση οπότε η περιοχή αποδοχής της H_0 ορίζεται από το διάστημα

$$\hat{p}_x \pm z_{1-a/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

ενώ όταν εκτιμούμε διάστημα εμπιστοσύνης για την p η διακύμανση της $\hat{p}$ είναι άγνωστη και εκτιμάται από το δείγμα, οπότε το αντίστοιχο διάστημα είναι το

$$\hat{p}_x \pm z_{1-a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}}$$

Επομένως, είναι δυνατόν ενώ μια τιμή H_0 να ανήκει στο διάστημα αυτό, ο αντίστοιχος έλεγχος να μας οδηγήσει στην απόρριψη της.